

Zur rotatorischen Bewegung eines Systems von n Massenpunkten. I

H. RUDER und H. VOLZ

Institut für Theoretische Physik der Universität Erlangen-Nürnberg

(Z. Naturforsch. **23a**, 1419–1430 [1968]; eingegangen am 2. Juli 1968)

The concept of rotational motion of a system of particles is strongly related to the existence of a frame of reference connected with the system in such a way that the coupling terms between the internal and the rotational motions vanish.

This frame of reference, if existent, has to be uniquely defined independent of the type of motion by the configuration of the system only.

It is shown that only in very special cases such a frame can be found. The existence of such a frame, however, is not sufficient for the appearance of a rotational structure in the energy spectrum of the system in quantum mechanical treatment. The importance of eliminating the coupling terms for the transition from the system of point masses to the limiting case of the rigid body is discussed. It is shown that in the case of exact decoupling the effective moments of inertia appearing in the Hamiltonian of the collective motion necessarily agree with the normal definition. It therefore seems inconsistent to neglect coupling terms and to take non-normal moments of inertia from the collective part alone.

I. Problemstellung

In einem System von n Massenpunkten, die durch innere Kräfte miteinander in Wechselwirkung stehen, gelten stets die beiden Erhaltungssätze des Gesamtimpulses und des gesamten Drehimpulses. Der erste Erhaltungssatz gibt die Möglichkeit, die Bewegung des Schwerpunktes von der inneren Bewegung des Systems abzutrennen, indem man in ein Koordinatensystem übergeht, in welchem der Schwerpunkt ruht. Der zweite Erhaltungssatz legt infolgedessen die Frage nahe, ob es möglich ist, durch Einführung eines geeignet rotierenden Bezugssystems noch einen zweiten kollektiven Bewegungsanteil, nämlich eine Rotationsbewegung, abzutrennen. Diese zweite Frage ist von vornherein wesentlich problematischer als die erste, weil dabei der Übergang in ein Nichtinertialsystem zu vollziehen ist. Das Auftreten gequantelter Rotationszustände in Atomkernen zeigt jedoch, daß unter gewissen Umständen in Systemen von Massenpunkten solche kollektiven Bewegungstypen in Erscheinung treten.

In dem vorliegenden ersten Teil soll untersucht werden, ob, wie weit und in welchen Fällen eine Separation zwischen der inneren Bewegung des Systems und einer kollektiven rotatorischen Bewegung durchführbar ist. Die Frage, wie sich dann, wenn eine Separation nicht vollständig möglich ist, der Fall der Entkopplung optimal annähern läßt, soll einer späteren Arbeit (Teil II) vorbehalten bleiben.

Die Aufgabe besteht allgemein darin, ein mit dem System geeignet verbundenes Achsenkreuz zu er-

mitteln, dessen momentane Drehgeschwindigkeit Ω gegenüber dem Inertialsystem die kollektive Drehung unseres Punktsystems repräsentiert. Der gesamte Drehimpuls müßte sich dann in der Form $L = \Theta \Omega$ darstellen lassen, wo Θ den momentanen Trägheitstensor des Systems bedeutet.

Wenn auch die Atomkerne das wichtigste Anwendungsgebiet unserer Überlegungen darstellen, so stellt sich doch das vorliegende Problem in der klassischen Mechanik und in der Quantenmechanik grundsätzlich in analoger Weise. Wir werden deshalb zwar in den ersten Abschnitten, die zunächst das Dreikörperproblem behandeln, von wellenmechanischen Methoden Gebrauch machen, uns aber dann in den weitergehenden Betrachtungen der Sprache der klassischen Mechanik bedienen, in welcher für den allgemeinen Fall eines Systems von beliebig vielen Teilchen die wesentlichen Züge des Problems vollkommen deutlich werden.

II. Möglichkeiten der Einführung körpergebundener Koordinatensysteme und ihre methodischen Auswirkungen

Als Anfangspunkt des zu ermittelnden Koordinatensystems wählen wir im folgenden den Schwerpunkt des betrachteten n -Teilchen-Systems. Für die Einführung eines von diesem Punkt ausgehenden orthogonalen Achsenkreuzes $\xi\eta\zeta$ bieten sich dann zwei Möglichkeiten an, die sich in gewissem Sinne als Extremfälle gegenüberstehen. Die erste Möglichkeit können wir grundsätzlich so beschreiben, daß man zur Definition der Achsenrichtungen drei



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Massenpunkte herausgreift. Man kann vereinbaren, daß etwa die beiden ersten die Richtung der ζ -Achse, der dritte zusammen mit den beiden vorherigen die ξ - ζ -Ebene festlegen. Das so eingeführte Koordinatensystem ist von Lage und Bewegungszustand aller übrigen Teilchen völlig unabhängig. Bezüglich der Freiheitsgrade der Bewegung ist es in diesem Fall kein Unterschied, ob man die übrigen Teilchen vom raumfesten oder vom körpergebundenen System aus beschreibt.

Eine derartige Einführung eines Koordinatensystems wird sich dann empfehlen, wenn in dem System einige wenige Teilchen vorhanden sind, die aus physikalischen Gründen, vor allem durch größere Masse, gegenüber den anderen bevorzugt sind, wie dies in der Molekülphysik oft der Fall ist.

Während bei der soeben geschilderten Methode nur gerade so viele Teilchen aus dem System herausgegriffen werden, wie nötig sind, um überhaupt ein Achsenkreuz eindeutig zu definieren, können wir die zweite Möglichkeit dadurch kennzeichnen, daß alle Teilchen des Systems in die Definition des Achsenkreuzes eingehen. Ein Beispiel sind die momentanen Hauptträgheitsachsen des Systems der n Massenpunkte. Diese Möglichkeit wird man sicher dann wählen, wenn man es mit einem System von n starr miteinander verbundenen Massenpunkten, d. h. mit einem starren Körper zu tun hat. Ganz allgemein wird sich die zweite Möglichkeit für die Einführung eines Achsenkreuzes auch für ein nichtstarres Punktsystem empfehlen, wenn dieses aus Massen von nicht allzu verschiedener Größe aufgebaut ist und wir neben der inneren Bewegung eine kollektive Drehung des gesamten Systems im Raum beschreiben wollen. Obwohl sich hier die Wahl der Hauptträgheitsachsen als Koordinatenachsen unmittelbar anzubieten scheint, so ist dieses Verfahren, wie sich im Verlaufe unserer Untersuchungen zeigen wird, keineswegs das einzig mögliche und im allgemeinen nicht das methodisch vorteilhafteste.

Die Fragestellung, mit der wir es dabei zu tun haben, ergibt sich aus folgender Überlegung: Das körpergebundene Koordinatensystem wird gegenüber dem raumfesten System durch drei Eulersche Winkel festgelegt. Bei einem starren Gebilde sind

diese drei Winkel die einzigen auftretenden Variablen. Im Falle eines beliebigen Punktsystems treten neben diese drei äußeren oder „kollektiven“ Koordinaten noch die inneren „relativen“ Koordinaten. Wenn nur innere Kräfte vorhanden sind, was wir voraussetzen wollen, so gehen in die potentielle Energie nur die letzteren ein. Wir brauchen deshalb diesen Anteil weiterhin nicht mehr zu betrachten. Der kinetische Anteil des Hamilton-Operators bzw. der Hamilton-Funktion — die wir, wenn wir nicht unterscheiden wollen, zusammenfassend als Hamilton-Form bezeichnen werden — enthält neben den äußeren und den inneren Koordinaten die zugehörigen kanonisch konjugierten Impulse. In der wellenmechanischen Form, die wir zunächst weiter diskutieren, treten diese als Differentialoperatoren 1. und 2. Ordnung nach den betreffenden Koordinaten in Erscheinung. Wir teilen die darin auftretenden Glieder für das folgende in drei Gruppen ein. Die 1. Gruppe H_1 soll nur Ableitungen nach den inneren Koordinaten enthalten, die 2. Gruppe H_2 diejenigen nach den äußeren Koordinaten. Die 3. Gruppe, die wir insgesamt als Kopplungsoperator \tilde{H}_k bezeichnen, wird von denjenigen Gliedern gebildet, die gemischte Ableitungen nach je einer inneren und einer äußeren Koordinate enthalten. Art und Größe dieser Kopplungsglieder werden von der Wahl des ξ - η - ζ -Systems ganz wesentlich beeinflusst. Es ist jedoch, wie schon gezeigt wurde^{1, 2, 3}, im allgemeinen nicht möglich, durch die Einführung eines geeigneten Systems diese Glieder vollständig zum Verschwinden zu bringen. Es wird sich jedoch herausstellen, daß dies immerhin in gewissen Spezialfällen noch möglich ist. Im translatorischen Fall wäre damit bereits eine vollständige Separation zwischen innerer und kollektiver Bewegung erreicht. Im rotatorischen Fall gilt dies jedoch wiederum nur für spezielle Bewegungstypen. Wir werden auf diese Fragen in den folgenden Abschnitten näher eingehen.

Der kollektive Anteil H_2 in der Hamilton-Form läßt sich als quadratische Form in den ξ -, η -, ζ -Komponenten des Gesamtdrehimpulses schreiben. Für ihn bedeutet eine verschiedene Wahl des ξ - η - ζ -Systems, daß der in dieser Darstellung formal auftretende Trägheitstensor* seinen Wert ändert, wo-

¹ A. WEIGUNY, Z. Phys. **186**, 227 [1965].

² S. FLÜGGE u. A. WEIGUNY, Z. Phys. **171**, 171 [1963].

³ H. NÄPFEL, H. RUDER, Diplomarbeiten, Erlangen 1964 (unveröffentlicht).

* Wegen $L_\xi L_\eta \neq L_\eta L_\xi$ usw. kann dieser Tensor in der quantenmechanischen Formulierung antisymmetrische Anteile enthalten, die in der klassischen Form nicht vorhanden sind. Wir werden auf die damit verbundenen Fragen bei späterer Gelegenheit eingehen. Die folgenden Überlegungen werden davon nicht betroffen.

bei zu bemerken ist, daß dieser bei Vorhandensein von Kopplungsgliedern nicht mit demjenigen übereinstimmt, den man dem Punktsystem nach der normalen Definition zuordnen würde. Die Untersuchungen von TAMURA⁴ u. VILLARS^{5,6} zeigen, daß bei Wahl der Hauptträgheitsachsen die auftretenden „Trägheitsmomente“ sehr viel kleiner sind als die normalen. Es ergeben sich hier Beziehungen zu den von BOHR eingeführten Trägheitsmomenten eines rotierenden Flüssigkeitstropfens.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß wir bei unserer Problemstellung den Kopplungsgliedern unser besonderes Augenmerk zuwenden müssen. Um hierbei möglichst weit ohne Näherungsannahmen auszukommen und um die auftretenden Formeln möglichst übersichtlich zu halten, führen wir dies zunächst am Fall des 3-Körperproblems aus.

III. Wellenmechanische Behandlung der Kopplungsglieder beim Drei-Körper-Problem

Die Methoden 1 und 2 für die Einführung eines körpergebundenen Koordinatensystems führen im Falle des 3-Körper-Problems insoweit zum gleichen Resultat, als in jedem Falle die Flächennormale des von den drei Punkten aufgespannten Dreiecks Koordinatenachse wird. Der Unterschied liegt also nur in der Festlegung der beiden restlichen Achsen innerhalb der Dreiecksebene. Nach Methode 1 liegt eine weitere Achse parallel zur Verbindungslinie zweier Massenpunkte, nach Methode 2 ist die Lage der beiden restlichen Achsen durch alle drei Massenpunkte bestimmt, beispielsweise so, daß dafür die beiden in der Dreiecksebene liegenden Trägheitsachsen gewählt werden. Dieses letztere System wird von FLÜGGE u. Mitarb.⁷ verwendet. Es führt dazu, daß sämtliche zur Festlegung der drei Massenpunkte innerhalb dieses Systems einzuführenden Koordinaten in Form gemischter Differentialoperatoren 2. Ordnung mit den äußeren Koordinaten koppeln.

Es ist die Frage, ob sich durch eine andere, günstigere Wahl des in der Dreiecksebene liegenden Achsenpaares wenigstens eine teilweise Entkopplung zwischen inneren und äußeren Koordinaten herbeiführen läßt. Zur Untersuchung dieser Frage gehen wir aus von dem Hamilton-Operator des

3-Körper-Problems in der Form, wie er von RUDER⁸ angegeben worden ist. Das dort eingeführte Koordinatensystem entspricht zunächst der Einführung nach Methode 1, wobei die ζ -Achse parallel zur Verbindungslinie der Massen 1 und 2 liegt. Als innere Koordinaten zur Festlegung der Gestalt des Dreiecks werden verwendet der Abstand des Massenpunktes 1 vom Massenpunkt 2, der Abstand des Massenpunktes 3 vom Schwerpunkt der beiden ersten Punkte sowie der zwischen diesen beiden Richtungen liegende Winkel u (Abb. 1a).

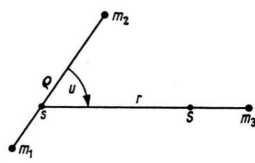


Abb. 1a. s: Schwerpunkt von m_1 und m_2 . S: Gesamtschwerpunkt.

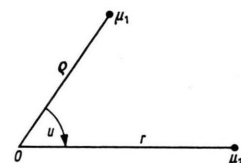


Abb. 1b. Reduziertes System. O: Ursprung des raumfesten Koordinatensystems.

Abb. 1. Koordinaten im 3-Teilchen-System. Variationsbereiche: $0 \leq \rho \leq \infty$, $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq u \leq \pi$.

Bei dieser Koordinatenwahl nimmt der Ausdruck für die kinetische Energie des 3-Teilchen-Systems dieselbe Form an wie die kinetische Energie für ein 2-Teilchen-System mit den reduzierten Massen

$$\mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu_2 = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (1)$$

die sich in den Abständen ρ bzw. r um ein Zentrum bewegen, wobei die beiden Radien den Winkel u einschließen (Abb. 1b). Wir werden von dieser Äquivalenz zwischen dem allgemeinen 3-Teilchen-Problem und dem zugehörigen 2-Teilchen-Problem im folgenden ständig in dem Sinne Gebrauch machen, daß wir nur noch von den beiden (reduzierten) Massen μ_1 und μ_2 sprechen. Wir bemerken schon jetzt, daß sich ganz analog, wie dies hier für das 3-Teilchen-System geschieht, auch ein System von n Massenpunkten auf ein solches von $n-1$ (reduzierten) Massenpunkten zurückführen läßt.

Aus dem bei RUDER⁸ angegebenen H_k ergibt sich das unserer Definition entsprechende Kopplungsglied zu

$$\tilde{H}_k = -\frac{1}{\mu_1 \rho^2} L_\eta \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial u}. \quad (2)$$

⁴ T. TAMURA, Fortschr. Phys. **6**, 109 [1958].

⁵ F. VILLARS, Nucl. Phys. **3**, 240 [1957].

⁶ F. VILLARS, Ann. Rev. Nucl. Sci. **7**, 185 [1957].

⁷ H. DIEHL, S. FLÜGGE, U. SCHRÖDER, A. VÖLKELE u. A. WEIGUNY, Z. Phys. **162**, 1 [1961].

⁸ H. RUDER, Z. Naturforsch. **23a**, 579 [1968].

Dabei ist L_η die Komponente des Gesamtdrehimpulses in Richtung der η -Achse (Flächennormale) unseres Systems und enthält nur Ableitungen erster Ordnung nach den Eulerschen Winkeln, wobei die genaue Gestalt von L_η von der speziellen Einführung dieser Winkel abhängt. Ausdruck (2) ist bis auf den Faktor $-1/\mu_1 \varrho^2$ das Skalarprodukt aus dem Gesamtdrehimpuls des Systems mit einem „inneren Drehimpuls“, der naturgemäß die Richtung der Normalen zur Dreiecksebene besitzt.

Man stellt also fest, daß in diesem Falle die Kopplung mit den äußeren Koordinaten — im Sinne einer Differentiationsvorschrift — nur über eine innere Koordinate, nämlich über den Winkel u erfolgt. Damit ist schon eine wesentlich günstigere Ausgangslage erreicht als bei FLÜGGE⁷. Um ganz allgemein die Frage zu beantworten, ob sich noch geeignetere Möglichkeiten finden lassen, führen wir ein Koordinatensystem ein, welches gegenüber dem ursprünglichen um einen noch zu bestimmenden Winkel $\chi(\varrho, r, u)$ um die Flächennormale verdreht ist, und untersuchen die sich dabei ergebende Form des Hamilton-Operators.

Bei einer solchen Transformation ändert sich H_1 nicht. In H_2 treten, wie schon erwähnt, veränderte Elemente des Trägheitstensors auf, die sich jedoch, wie wir nochmals betonen, nicht einfach durch Koordinatentransformation aus den ursprünglichen ergeben.

Das Kopplungsglied nimmt die Form an

$$\tilde{H}_k = L_\eta \frac{\hbar}{i} \left[\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \chi}{\partial \varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \chi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{\mu_1 \varrho^2} + \frac{1}{\mu_2 r^2} \right) \left(\frac{\partial \chi}{\partial u} - \frac{\mu_2 r^2}{\mu_1 \varrho^2 + \mu_2 r^2} \right) \frac{\partial}{\partial u} \right]. \quad (3)$$

Im Gegensatz zu (2) erfolgt, wie zu erwarten, die Kopplung mit den in L_η auftretenden äußeren Variablen nunmehr über alle drei inneren Koordinaten. Der vorliegende Ausdruck zeigt nochmals, daß eine völlige Entkopplung nicht zu erreichen ist. Ein Verschwinden der beiden ersten Glieder in der Klammer würde bedeuten, daß $\chi(\varrho, r, u)$ weder von ϱ noch von r abhängt, während umgekehrt das letzte Glied nur dann verschwindet, wenn

$$\chi = \frac{\mu_2 r^2}{\mu_1 \varrho^2 + \mu_2 r^2} u + f(\varrho, r) \quad (4)$$

wird, was in Widerspruch zur ersten Forderung steht.

Man erkennt jedoch die Möglichkeit, durch geeignete Wahl der Funktion $\chi(\varrho, r, u)$ entweder die Variablen ϱ und r oder die Variable u zu entkoppeln.

Man wird die sich damit anbietende teilweise Entkopplung in der Richtung durchführen, daß die verbleibenden Kopplungsglieder aufgrund der physikalischen Natur des Problems möglichst klein bleiben.

Wenn beispielsweise erwartet werden kann, daß sich die beiden Teilchen so bewegen, daß die Größen ϱ und r nur in kleinen Bereichen um gewisse Mittelwerte ϱ_0 und r_0 herum variieren, so wird man

$$\chi = \frac{\mu_2 r_0^2}{\mu_1 \varrho_0^2 + \mu_2 r_0^2} u \quad (5)$$

wählen. Damit entfallen die Kopplungsglieder über die Variablen ϱ und r , während die Kopplung über den Winkel u den Faktor

$$\left(\frac{\mu_2 r_0^2}{\mu_1 \varrho_0^2 + \mu_2 r_0^2} - \frac{\mu_2 r^2}{\mu_1 \varrho^2 + \mu_2 r^2} \right) = - \left(\frac{\mu_1 \varrho_0^2}{\mu_1 \varrho_0^2 + \mu_2 r_0^2} - \frac{\mu_1 \varrho^2}{\mu_1 \varrho^2 + \mu_2 r^2} \right) \quad (6)$$

enthält, der in dem angenommenen Fall als klein zu betrachten ist.

Wenn umgekehrt ein Problem zu behandeln ist, in welchem der Winkel u in der Nähe eines bestimmten Wertes u_0 bleibt, so wird man

$$\chi = \frac{\mu_2 r^2}{\mu_1 \varrho^2 + \mu_2 r^2} (u - u_0) \quad (7)$$

wählen. Bei diesem Ansatz entfällt die Kopplung über den Winkel u , während die Kopplungsglieder über ϱ und r den Faktor $(u - u_0)$ erhalten. Dieser Fall liegt beispielsweise dann vor, wenn sich unser System so bewegt, daß es näherungsweise einen symmetrischen Kreisel darstellt. Der Winkel u liegt dann, wie man sich leicht überzeugt, stets nahe bei $u_0 = \pi/2$.

Unsere Überlegungen zeigen, daß sich im 3-Körperproblem mit den von uns gewählten Koordinaten ein Verschwinden der Kopplungsglieder nicht wie bei Flügge erst im Grenzfall des Starrwerdens aller inneren Koordinaten, sondern auch schon dann erreichen läßt, wenn entweder die eingeführten Längenkoordinaten oder die Winkelkoordinate noch völlig frei variabel sind.

IV. Bemerkungen zum Übergang zum starren Körper

1. Wellenmechanische Betrachtung

Die im vorangehenden Abschnitt durchgeführten Überlegungen gewinnen besonderes Interesse, wenn

man den Übergang vom nichtstarrten Gebilde zum starren Körper untersucht. Dieser Übergang wäre in der klassischen Mechanik einfach dadurch zu vollziehen, daß man den inneren Koordinaten bestimmte, feste Werte beilegt. In der Wellenmechanik läßt sich dieser Übergang jedoch nicht so einfach vollziehen, da die starr werdenden Koordinaten im Hamilton-Operator noch in Form von Differentialoperatoren auftreten.

Das oben geschilderte Verfahren ist nun genau darauf abgestellt, diese Differentialoperatoren in den Kopplungstermen zu beseitigen. Es werden dabei zunächst die Kopplungsglieder für einen Teil der Variablen zum Verschwinden gebracht. In diesen Variablen steht dann, soweit es H_k betrifft, einem Starrwerden nichts mehr im Wege. Der verbleibende Kopplungsterm hat nun aber gerade die Eigenschaft, daß er bei einem solchen Starrwerden der schon entkoppelten Koordinaten ebenfalls verschwindet, so daß bezüglich der restlichen inneren Koordinaten vom Kopplungsglied her keinerlei Problem mehr auftritt.

Um den Übergang zum starren Körper vollständig durchzuführen, ist allerdings noch das Verhalten von H_1 beim Starrwerden der inneren Koordinaten zu verfolgen. Im allgemeinen hat man in H_1 wiederum mit dem Auftreten gemischter Ableitungen nach den verschiedenen inneren Koordinaten zu rechnen. Man hätte dann einen dem Obigen entsprechenden Gedankengang zur Beseitigung dieser inneren Verkopplung durchzuführen. Im vorliegenden Fall des 3-Körper-Problems und bei der von uns durchgeführten Koordinatenwahl zeigt sich jedoch^{3,8}, daß H_1 keine solchen gemischten Differentialoperatoren mehr enthält. Man kann dann so vorgehen, daß man zu dem Anteil jeder einzelnen Koordinate in H_1 ein schmales Kastenpotential in dieser Variablen hinzufügt, welches diese im Grenzübergang auf den gewünschten konstanten Wert festlegt und welches sich unschwer so einrichten läßt, daß der mit den quantenmechanisch verbleibenden kleinen Schwingungen verbundene Eigenwert gerade den Wert 0 annimmt³.

Von dem gesamten Hamilton-Operator verbleibt dann nur noch der Anteil H_2 . Es zeigt sich, daß bei Durchführung des hier dargestellten Grenzübergangs der darin stets formal auftretende Trägheitstensor den Wert annimmt, welcher der Konfigura-

tion des Systems nach der üblichen Definition entspricht. Damit geht H_2 in den Schrödingerschen Operator des asymmetrischen Kreisels über, wie er von WANG⁹ durch direktes Übersetzen der klassischen Hamilton-Funktion des asymmetrischen Kreisels mit Hilfe der Schrödingerschen Übersetzungsvorschrift¹⁰ berechnet wurde. Man kann also sagen, daß die Schrödingersche Übersetzungsvorschrift, die für nichtpunktmechanische Systeme den Charakter eines neuen Axioms hat, durch unsere Überlegungen noch einmal modellmäßig begründet wird.

2. Zur analogen Behandlung des Problems nach der klassischen Mechanik

Die vorstehenden Überlegungen zeigen, daß beim Übergang zum starren Körper in der wellenmechanischen Behandlung gewisse Komplikationen auftreten, die durch die geschilderte besondere Führung des Grenzübergangs überwunden werden mußten. Hier scheint ein grundsätzlicher Unterschied gegenüber der klassischen Mechanik vorzuliegen, wo derselbe Übergang keinerlei Schwierigkeit macht. Der Grund dafür liegt sicher zum Teil darin, daß die Möglichkeit der klassischen Mechanik, den Abstand von Massenpunkten exakt festzuhalten, in der Wellenmechanik nicht besteht. Wir haben aber gesehen, daß sich gerade die damit verbundenen Komplikationen am Schluß unserer Überlegungen verhältnismäßig leicht überwinden ließen. Die Frage ist, ob die bei den vorangegangenen Schritten aufgetretene Notwendigkeit der Entkopplung zwischen inneren und äußeren Koordinaten ebenfalls spezifisch wellenmechanischer Natur ist, oder ob sich dafür auf der klassischen Seite ein entsprechendes Gegenstück findet.

Zur Untersuchung dieser Frage betrachten wir die durchzuführenden gedanklichen Schritte gemäß Abb. 2.

Die bisher durchgeführten Überlegungen entsprechen dem Weg von A über B nach C, während das Wangsche Verfahren durch den Schritt C—D dargestellt ist. Die von uns gestellte Frage betrifft den Schritt A—C.

Man kann feststellen, daß der Weg A—C, wenn man ihn auf der Stufe des Lagrange-Formalismus, also mit Koordinaten und Geschwindigkeiten durchführt, keinerlei Probleme in sich schließt, da man

⁹ S. C. WANG, Phys. Rev. **34**, 243 [1929].

¹⁰ E. SCHRÖDINGER, Ann. Phys. **79**, 361 [1926].

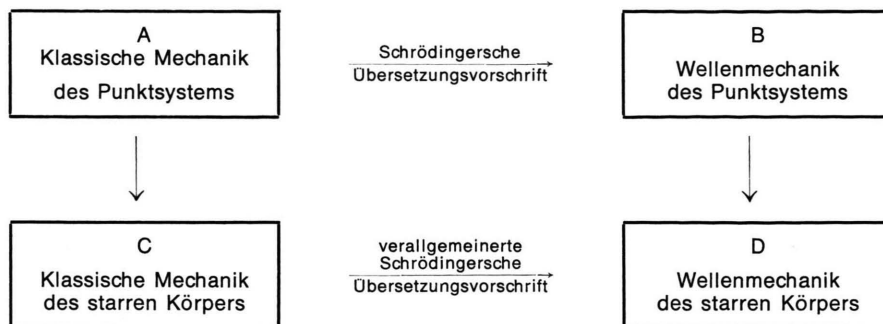


Abb. 2. Gedankliche Wege beim Übergang zum starren Körper.

beim Starrwerden lediglich die Zeitableitungen der betreffenden inneren Koordinaten Null zu setzen braucht.

Das Entkopplungsproblem, das wir auf dem Weg B—D angetroffen haben, begegnet uns jedoch auf der klassischen Seite in ganz analoger Form, wenn wir hier den Übergang von der Hamilton-Funktion eines nichtstarrten Punktsystems zur Hamilton-Funktion des starren Körpers vornehmen wollen. Auch auf der klassischen Seite erhalten wir bei entsprechender Wahl der Koordinaten in der Hamilton-Funktion die Anteile H_1 , H_2 und H_k , in welchen naturgemäß nicht Differentialoperatoren, sondern kanonische Impulse auftreten. Das genannte Problem tritt hier auf bei der Frage, was das Starrwerden gewisser Koordinaten ($\dot{q}_i = 0$) für die zugehörigen kanonischen Impulse bedeutet. Man stellt fest, daß sich diese Frage auch durch Zurückgehen auf die Lagrange-Funktion nur dann eindeutig klären läßt, wenn in der letzteren keine gemischten Produkte der Form $\dot{q}_i \cdot \dot{q}_k$ für irgendeine starrwerdende Koordinate q_i vorkommen. Nur dann folgt aus $\dot{q}_i = 0$ auch $p_i = 0$. D.h. also, daß man auch hier versuchen muß, durch geeignete Koordinatentransformationen diese gemischten Produkte, also Kopplungsterme, zu beseitigen. Die genaue Durchführung dieses Programms³ liefert für das Verschwinden der Kopplungsglieder dieselben Bedingungsgleichungen wie im quantenmechanischen Fall. Damit zeigt sich die Äquivalenz der beiden Wege A—B—D und A—C—D.

V. Geometrische und kinematische Diskussion

Wir betrachten den speziellen Fall, daß die beiden Massen des reduzierten Problems sich in festen Abständen ϱ_0 und r_0 um ein Zentrum bewegen. Dann ist durch die Beziehung (5) in der Ebene der drei

Massenpunkte eine ζ' -Achse und damit ein körpergebundenes Koordinatensystem $\xi'\eta\zeta'$ festgelegt, welches sich — von Sonderfällen abgesehen — in durchaus anderer Weise mit dem System unserer Massenpunkte mitbewegt, als dies die Hauptträgheitsachsen tun. Es kommt bei dem hier eingeführten Achsenkreuz naturgemäß nur auf die Vorschrift an, gemäß welcher diese Mitbewegung erfolgt. Eine zusätzliche, zeitlich konstante Verdrehung des Systems gegenüber dem gefundenen ist unwesentlich.

Die durch (5) gegebene Beziehung ist analog zu der Bestimmungsgleichung für den Schwerpunkt zweier Massenpunkte, wenn man die Massen durch die beiden Trägheitsmomente $\mu_1 \varrho_0^2$ und $\mu_2 r_0^2$ und den Abstand der beiden Punkte durch die Winkelgröße u ersetzt. Diese Analogie setzt sich weiter fort, wenn wir den Spezialfall betrachten, daß die beiden Massen sich in einer raumfesten Ebene bewegen. Die kinetische Energie der beiden Massenpunkte, die zunächst in der Form

$$T = \frac{1}{2\mu_1 \varrho_0^2} L_1^2 + \frac{1}{2\mu_2 r_0^2} L_2^2 \quad (8)$$

geschrieben werden kann, geht bei Einführung der „Relativ“-Koordinate u und einer „kollektiven“ Koordinate α , nämlich des Winkels zwischen einer in der Ebene liegenden raumfesten Achse und der ζ' -Achse, über in

$$T = \left(\frac{1}{2\mu_1 \varrho_0^2} + \frac{1}{2\mu_2 r_0^2} \right) p_u^2 + \frac{1}{2(\mu_1 \varrho_0^2 + \mu_2 r_0^2)} L_\eta^2, \quad (9)$$

wobei p_u und $L_\eta \equiv p_\alpha$ die zu den eingeführten Koordinaten u bzw. α kanonisch konjugierten Größen sind. Die kinetische Energie zerfällt also in einen „Relativ“-Anteil mit einem „reduzierten“ Trägheitsmoment und einen kollektiven Anteil, in welchem die Summe der beiden Trägheitsmomente auf-

tritt. Hieraus entnimmt man, daß die ζ' -Achse in der betreffenden Ebene entweder ruht oder gegenüber der raumfesten Bezugsachse eine gleichförmige Rotation ausführt. Das gilt auch dann, wenn die beiden Massen eine Wechselwirkung aufweisen, die in diesem Fall vom Winkel u abhängen wird.

Für den Fall, daß der allgemeinere Bewegungstypus vorliegt, wo die Drehimpulse L_1 und L_2 nicht mehr parallel sind, besteht zwar nach unseren früheren Überlegungen mathematisch nach wie vor die Möglichkeit der „Entkopplung“ im Sinne von Abschnitt III. Die durch (5) definierte Achse, die wir weiterhin als die „Zentralachse“ unseres Systems bezeichnen wollen, führt jedoch schon im wechselwirkungsfreien Fall eine sehr komplizierte Bewegung durch, die anschaulich nicht mehr faßbar ist. Wir wenden uns deshalb der Frage zu, welche Einsichten sich auf der mathematischen Seite mit Hilfe der angestrebten Entkopplung gewinnen lassen.

VI. Methodische Bedeutung der Entkopplung

Nachdem sich für das Dreikörperproblem wenigstens für den Fall von — im reduzierten System — festen Zentralabständen die Möglichkeit der Beseitigung der Kopplungsglieder ergeben hat, betrachten wir die damit verbundenen Fragen gleich für den allgemeinen Fall eines Systems von $n-1$ (reduzierten) Massenpunkten — welches wir uns wiederum durch Reduktion aus einem System von n Massenpunkten entstanden denken. Da wir gesehen haben, daß Radialbewegungen die Entkopplung grundsätzlich verhindern, beschränken wir uns von vornherein auf feste Zentralabstände der reduzierten Massen.

Um den Gedankengang möglichst allgemein durchzuführen, bezeichnen wir die in unserem Problem auftretenden Koordinatengruppen durch zusammenfassende Symbole. Wir haben es mit Teilchen zu tun, die sich in festen Abständen um ein Zentrum bewegen und die wir in einem raumfesten Bezugssystem durch Polarkoordinaten ϑ_i , φ_i beschreiben. Wir bezeichnen diese Koordinaten in ihrer Gesamtheit mit q_0 . Bei Einführung eines körpergebundenen Bezugssystems treten als Bestimmungsstücke des Systems auf der einen Seite innere Koordinaten q_1 auf, die die Konfiguration im körpergebundenen System festlegen, auf der anderen Seite die drei Eulerschen Winkel, die wir insgesamt

— unserem früheren H_2 entsprechend — mit q_2 bezeichnen.

Die Gesamtheit der zu diesen Variablengruppen gehörigen kanonischen Impulse bezeichnen wir entsprechend mit p_0 , p_1 und p_2 .

Die Hamilton-Form war allgemein zunächst in den Variablen q_0 und p_0 gegeben. Durch Einführung des körpergebundenen Bezugssystems wird sie übergeführt in eine Funktion der Größen q_1 , q_2 , p_1 und p_2 , in welcher, unserer Zielsetzung entsprechend, keine Kopplungsterme auftreten sollen. In den Aufbau der verbleibenden Terme gewinnen wir Einblick durch Betrachtung der beiden Beispiele des vorigen Abschnitts. Wenn wir im ersten Beispiel noch eine beliebige, u -abhängige Wechselwirkung zulassen, so erkennen wir, daß es im Falle der Gl. (9) gelungen ist, der Hamilton-Form die Gestalt

$$H = H_1(q_1, p_1) + H_2(p_2) \quad (10)$$

zu geben. H_1 hat hier schon seine auch für beliebige Systeme gültige allgemeine Form. Dem zyklischen Charakter der Koordinate q_2 entspricht die im vorigen Abschnitt gefundene gleichförmige Bewegung der Zentralachse. Schon im zweiten Beispiel des vorigen Abschnitts nimmt auch H_2 seine allgemein gültige Form an. Es geht über in die Hamilton-Form des asymmetrischen Kreisels, die sich mittels des Gesamtdrehimpulses L und des Trägheitstensors Θ des Gebildes in der Form $\frac{1}{2} L(\Theta^{-1}) L$ darstellen läßt. Wegen der Abhängigkeit des Trägheitstensors von q_1 treten diese Koordinaten nunmehr auch in H_2 auf, außerdem werden die Komponenten des Drehimpulses Funktionen von q_2 und p_2 . Wir erhalten also schon hier die auch im allgemeinen Falle zu erwartende Hamilton-Form

$$H = H_1(q_1, p_1) + H_2(q_1, q_2, p_2). \quad (11)$$

Im Falle der Gl. (10) ist das Problem wellenmechanisch sofort separierbar. Die Energiewerte des Systems setzen sich additiv zusammen aus den Eigenwerten der inneren Bewegung H_1 und den Rotationseigenwerten von H_2 . Auf jedem Energieterm der inneren Bewegung bauen sich also Rotationsbanden auf.

Im Gegensatz dazu enthält das zweite Glied in (11) nun ebenfalls die Koordinate q_1 . Das damit gegebene wellenmechanische Problem läßt sich also sicher nicht mehr allgemein durch einen Produktansatz

$$\Psi(q_1, q_2) = \Psi_1(q_1) \cdot \Psi_2(q_2) \quad (12)$$

lösen. Wenn es Spezialfälle geben soll, wo diese Möglichkeit besteht, so muß, wie man sofort sieht, H_2 so gebaut sein, daß eine Gleichung der Form

$$H_2(q_1, q_2, p_2) \Psi_2(q_2) = E_2(q_1) \Psi_2(q_2) \quad (13)$$

lösbar ist, eine Gleichung also, in welcher die Variable q_1 nur noch als Parameter in den Energieeigenwert E_2 eingeht. Das sich ergebende $E_2(q_1)$, welches vom Parameter q_1 abhängige Rotationssterme darstellt, tritt dann formal wie ein Potential zu $H_1(q_1)$ hinzu. Die Lösung der entstehenden Gleichung in q_1 liefert einerseits die Funktion $\Psi_1(q_1)$, die als Faktor zu der zuvor gefundenen Lösungsfunktion $\Psi_2(q_2)$ hinzutritt, andererseits den endgültigen Energieeigenwert des Systems. Aus diesem Lösungsgang ersieht man übrigens, daß eine Beseitigung der Kopplungsglieder keineswegs notwendig zu Rotationsbanden führt. Formal haben zwar die Eigenwerte E_2 zunächst die Gestalt von Rotationsstufen. Diese Struktur geht jedoch beim zweiten Lösungsschritt im allgemeinen wieder völlig verloren. Das einfachste Beispiel hierfür ist die Zentralbewegung einer einzigen Masse, etwa des Elektrons im Wasserstoffatom. Die Hamilton-Form hat hier mit $q_1 \sim r$, $q_2 \sim \vartheta$, p_2 die der Gl. (11) entsprechende Gestalt

$$H = \left[\frac{1}{2m} p_r^2 + V(r) \right] + \frac{1}{2mr^2} L^2.$$

Dieser Ausdruck hat die in (13) geforderte Eigenschaft, denn das zweite Glied, welches H_2 darstellt, liefert als Eigenwerte

$$E_2(q_1) = \frac{\hbar^2}{2mr^2} l(l+1).$$

Dieses Glied, welches als der bekannte Zentrifugalterm in die Radialgleichung eintritt, stellt Rotationsterme dar. Im endgültigen Energiespektrum findet sich jedoch bekanntlich keinerlei Rotationsstruktur mehr vor.

Allgemein wird H_2 die Forderung (13) dann erfüllen, wenn es die Gestalt

$$H_2 = \sum_i f_i(q_1) \cdot O_i(q_2, p_2) \quad (14)$$

besitzt, wo die f_i gewöhnliche Funktionen, die O_i untereinander vertauschbare Operatoren sind. Gleichung (13) kann dann durch Funktionen $\Psi_2(q_2)$ erfüllt werden, die gemeinsame Eigenfunktionen aller O_i sind. Wenn wir die zu den O_i gehörigen Eigenwerte (ohne Angabe der speziellen Quanten-

zahlen) mit λ_i bezeichnen, so wird

$$E_2(q_1) = \sum_i f_i(q_1) \cdot \lambda_i. \quad (15)$$

Man erkennt allerdings, daß das in (11) auftretende H_2 im Falle eines Systems von Massenpunkten sicherlich nicht der Forderung (14) mit vertauschbaren O_i genügt, da sich H_2 als quadratische Form aus den ξ -, η -, ζ -Komponenten des Gesamtdrehimpulses aufbaut, deren Einzelglieder im allgemeinen nicht vertauschbar sind. Eine Separation wird sich hier also in Strenge überhaupt nicht erreichen lassen, ganz zu schweigen von der Möglichkeit, die Energiersterme zu Rotationsbanden zusammenzufassen.

Ein Spezialfall, in welchem die an (14) anschließende Forderung erfüllt ist, soll hier zunächst ohne Bezugnahme auf unser spezielles Problem genannt werden. Das ist der Fall des symmetrischen Kreisels. Falls wir H_2 im System der Hauptträgheitsachsen darstellen, treten die Drehimpulskomponenten nur noch in den Kombinationen L_ξ^2 bzw. $L_\xi^2 + L_\eta^2$ auf, sie bilden also untereinander vertauschbare Operatoren, und es besteht wenigstens die Separationsmöglichkeit.

Alle Überlegungen des vorliegenden Abschnittes beruhen auf der Annahme, daß es möglich ist, die Hamilton-Form in der durch (11) gegebenen Weise aufzuspalten. Im Falle des reduzierten Dreikörperproblems mit festen Abständen ϱ_0 und r_0 ist diese Aufspaltung durch Einführung eines geeigneten Koordinatensystems gelungen. Wir wenden uns nun der Frage zu, ob sich dieses Verfahren auch auf den betrachteten Fall von $n-1$ reduzierten Massenpunkten erweitern läßt.

VII. Zur Frage der Erweiterung auf das n -Körperproblem

Wenn wir versuchen, auf dem bisherigen Wege über den Hamilton-Formalismus eine Erweiterung auf Systeme mit größerer Teilchenzahl zu gewinnen, so werden die auftretenden Ausdrücke für die verschiedenen Anteile des Hamilton-Operators und deren weitere Verarbeitung außerordentlich kompliziert. Schon bei unseren früheren Überlegungen, die den Übergang zum starren Körper zum Gegenstand hatten, hat sich gezeigt, daß der Hamiltonsche Formalismus zwar ein weitgehend paralleles Vorgehen zwischen klassischer und Quantenmechanik ermög-

licht, daß aber dabei u. U. Probleme auftreten, die sich auf der klassischen Seite bei Verwendung von Koordinaten und Geschwindigkeiten vermeiden lassen. Wir bringen deshalb unser Problem in eine Form, die Koordinaten und Geschwindigkeiten enthält. Sie ist damit zwar nicht unmittelbar in die Quantenmechanik übertragbar, läßt sich aber sofort für ein System von beliebig vielen Teilchen angeben. Die Ergebnisse, die wir dabei für die Frage der Entkopplung gewinnen, behalten ihre Gültigkeit auch im Hamilton-Formalismus und damit auch in der Wellenmechanik.

Wir gehen dazu auf die durch die Koordinaten und deren Zeitableitungen ausgedrückte kinetische Energie zurück. Wenn wir verlangen, daß die damit korrespondierende Hamilton-Form die in Gl. (11) angegebene Bauart besitzt, also keine Kopplungsglieder der Form $p_1 \cdot p_2$ enthält, so darf, wie man unmittelbar sieht, die kinetische Energie keine Glieder der Form $\dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2$ enthalten. Wenn außerdem H_1 von q_2 nicht abhängen soll, so folgt, daß die kinetische Energie die Form

$$T = T_1(q_1, \dot{q}_1) + T_2(q_1, q_2, \dot{q}_2) \quad (16)$$

haben muß.

Wir betrachten den Gesamtdrehimpuls \mathbf{L} unseres Systems. Dieser setzt sich zusammen aus den Beiträgen \mathbf{L}_i der einzelnen Massen. Jede dieser Größen können wir unter der Voraussetzung fester Abstände mit Hilfe der Trägheitstensoren Θ_i und der Winkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_i$ der $n-1$ Massenpunkte in der Form

$$\mathbf{L}_i = \Theta_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (17)$$

schreiben, wobei es wegen der besonderen Gestalt des Trägheitstensors eines einzelnen Massenpunktes keine Rolle spielt, daß die Komponente von $\boldsymbol{\omega}_i$ in der Radialrichtung unbestimmt ist. Damit wird

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \Theta_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (18)$$

$$\text{und} \quad 2T = \sum_i \boldsymbol{\omega}_i \mathbf{L}_i = \sum_i \boldsymbol{\omega}_i \Theta_i \boldsymbol{\omega}_i. \quad (19)$$

Wir drücken nun den Gesamtdrehimpuls \mathbf{L} mit Hilfe des gesamten Trägheitstensors $\Theta = \sum \Theta_i$ und einer noch zu bestimmenden Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$ aus in der Form

$$\mathbf{L} = \left(\sum \Theta_i \right) \boldsymbol{\Omega} = \Theta \boldsymbol{\Omega}. \quad (20)$$

Für $\boldsymbol{\Omega}$ ergibt sich daraus

$$\boldsymbol{\Omega} = \Theta^{-1} \mathbf{L} = \left(\sum \Theta_i \right)^{-1} \cdot \left(\sum \Theta_i \boldsymbol{\omega}_i \right). \quad (21)$$

Mit (21) ist $\boldsymbol{\Omega}$ als der momentane Drehvektor der kollektiven Drehung eingeführt.

Um den Zusammenhang mit unseren allgemeinen Überlegungen herzustellen, bemerken wir, daß die hier eingeführten Größen von der Form sind

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_i(q_0, \dot{q}_0), \quad \Theta_i = \Theta_i(q_0), \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(q_2, \dot{q}_2). \quad (22)$$

Die Winkelgeschwindigkeit der einzelnen Massenpunkte setzen wir in der Form

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{o}_i \quad (23)$$

an, wobei die $\mathbf{o}_i = \mathbf{o}_i(q_1, \dot{q}_1)$ die relativen Winkelgeschwindigkeiten, d. h. die Winkelgeschwindigkeiten bezüglich des sich mit $\boldsymbol{\Omega}$ drehenden Bezugssystems darstellen.

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke wird

$$\mathbf{L} = \sum_i \Theta_i (\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{o}_i). \quad (24)$$

Der Vergleich mit $\mathbf{L} = \left(\sum \Theta_i \right) \boldsymbol{\Omega}$ ergibt

$$\sum_i \Theta_i \mathbf{o}_i = \sum_i \mathbf{L}_i = 0. \quad (25)$$

Für die kinetische Energie ergibt sich dann

$$2T = \sum_i \mathbf{o}_i \Theta_i \mathbf{o}_i + \boldsymbol{\Omega} \left(\sum \Theta_i \right) \boldsymbol{\Omega}. \quad (26)$$

Wir haben die kinetische Energie damit in zwei Summanden zerlegt, von denen der erste Winkelgeschwindigkeiten enthält, die vom mitbewegten System aus gemessen sind. Der zweite Summand enthält die Winkelgeschwindigkeit der kollektiven Bewegung und den gesamten Trägheitstensor des Systems. Ganz allgemein zeigen unsere Überlegungen für ein beliebiges System von n Teilchen, daß in jedem Moment eine Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$ existiert, welche die kollektive Bewegung des Gebildes in dem Sinne darstellt, daß diese den Gesamtdrehimpuls übernimmt und daß die Bewegungsenergie in einen kollektiven und einen inneren Anteil zerfällt.

Die verschiedenen Trägheitstensoren Θ_i hängen nach (22) zunächst von den q_0 ab. Das gleiche gilt für den gesamten Trägheitstensor Θ . Wenn wir jedoch bedenken, daß die Θ_i in ihrer Darstellung im körpergebundenen System nur noch von den Größen q_1 abhängen, so sehen wir, daß die Zerlegung der kinetischen Energie in Gl. (26) die von uns gewünschte Form angenommen hat. Wir wissen allerdings noch nicht, wie das körpergebundene Koordinatensystem relativ zu den gegebenen Massenpunkten liegt. Diese Kenntnis ist nötig, um die un-

abhängigen q_0 durch die ebenfalls unabhängigen Koordinaten q_1 und q_2 auszudrücken.

Um die Zerlegung (26) zu erhalten, mußte Ω die Beziehung (21) erfüllen. In schematischer Schreibweise ist dies eine Gleichung der Form

$$\Omega(q_2, \dot{q}_2) = f(q_0, \dot{q}_0), \quad (27)$$

wo beide Seiten bekannte funktionale Formen sind.

Um die momentane Lage des körpergebundenen Systems zu finden, müssen wir aus dieser Gleichung q_2 ermitteln. Im Prinzip benötigt man dazu die Kenntnis von q_0 und \dot{q}_0 , also in jedem Augenblick die Kenntnis sowohl der Koordinaten als auch der Geschwindigkeiten der Massenpunkte. Da wir den Bewegungsablauf erst ermitteln wollen, können wir unsere Aufgabe nur dann als sinnvoll weitergeführt ansehen, wenn es gelingt, aus der obigen Gleichung q_2 unabhängig von \dot{q}_0 zu gewinnen. Dadurch wird nämlich erreicht, daß wir die Lage des körpergebundenen Bezugssystems nicht erst nach Kenntnis des vollständigen Bewegungsablaufs — durch Integration von Ω in (27) — feststellen können, sondern daß wir es in jedem Augenblick aus der Konfiguration allein bestimmen und in den Lösungsgang einführen können.

Wenn es gelingt, die damit formulierte Aufgabe zu lösen, so haben wir in (26) die kinetische Energie in der gewünschten Form (16) vor uns, worin die q_1 und q_2 unabhängige Koordinaten sind. Wir gelangen von hier aus eindeutig auf die Hamilton-Form (11), die sich unmittelbar wellenmechanisch interpretieren läßt.

Man sieht daraus übrigens, daß bei einer exakten Entkopplung der in H_2 auftretende Trägheitstensor klassisch wie wellenmechanisch der normalen Definition entspricht.

VIII. Zur Frage der Existenz des gesuchten Bezugssystems

Wir untersuchen die gestellte Aufgabe zunächst für die in Abschnitt V behandelten Beispiele zweier Massenpunkte. Wenn wir wieder mit dem einfachsten Fall beginnen, daß sich die beiden Teilchen in einer raumfesten Ebene bewegen, so liegen die in den Gln. (17) und (18) auftretenden Vektoren in der Richtung der Flächennormale des von den Massenpunkten zusammen mit dem Zentrum aufgespannten Dreiecks. Wenn wir die Komponenten in dieser Richtung mit dem Index n bezeichnen, so erhalten

wir aus Gl. (21)

$$\Omega_n = \frac{\mu_1 \varrho_0^2 \omega_{1n} + \mu_2 r_0^2 \omega_{2n}}{\mu_1 \varrho_0^2 + \mu_2 r_0^2}. \quad (28)$$

Die Zeitintegration dieser Beziehung läßt sich sofort durchführen und ergibt eine Winkelgröße, die — abgesehen von einer etwaigen Integrationskonstanten — mit der anschließend an Gl. (8) eingeführten kollektiven Koordinate α übereinstimmt. Damit ist zunächst für diesen Spezialfall gezeigt, daß eine Integration in dem gewünschten Sinne durchführbar ist, daß also ein körpergebundenes Koordinatensystem der gesuchten Art existiert. Man sieht überdies, daß sich die entsprechende Integration auch im Falle beliebig vieler Teilchen durchführen läßt, wenn sich diese sämtlich mit festen Abständen vom Zentrum in einer raumfesten Ebene bewegen. Wir haben hier eine vollständige Analogie zur Schwerpunktsbewegung im translatorischen Fall. Man erkennt diese Analogie wiederum in der Beziehung (25), die besagt, daß in diesem Bezugssystem die Summe der Relativ-Drehimpulse Null ist. Die Gln. (21) und (25) sind also in ihrer Aussage äquivalent.

Als nächstes betrachten wir den allgemeineren Fall, daß die Drehimpulse unserer beiden Teilchen nicht mehr parallel sind. Gleichung (25) bedeutet die Forderung, daß in dem zu ermittelnden Bezugssystem die beiden Relativ-Drehimpulse entgegengesetzt gleich sind. Da jeder dieser Drehimpulse auf dem zugehörigen Radius senkrecht steht, kommt für beide als gemeinsame Richtung nur diejenige der Flächennormale in Betracht. Der Raum, von dem aus sich der gewünschte Bewegungstypus ergibt, muß also offenbar so liegen, daß in ihm die Bewegung der beiden Massen in einer festen Ebene erfolgt. Wir können diesen mitbewegten Raum durch ein Achsenkreuz festlegen, dessen eine Achse die Flächennormale ist. In diesem Bezugssystem sind nun die beiden Relativdrehimpulse parallel, und die Forderung, daß sie entgegengesetzt gleich sein sollen, führt genau zu derselben Mitbewegung der in der Dreiecksebene liegenden ζ' -Achse wie im vorhergehenden Fall.

In Übereinstimmung mit unseren früheren Überlegungen ergibt sich also, daß sich in diesen beiden Fällen der Bewegung unseres Punktsystems eine räumliche Drehung unterlegen läßt, wobei die Lage des betreffenden Koordinatensystems eindeutig durch die augenblickliche Konfiguration des Systems festgelegt ist. Von diesem bewegten Bezugssystem aus gesehen verbleibt dann eine innere Bewegung,

die den Gesamtdrehimpuls Null aufweist und im Sinne von (11) von der Rotationsbewegung entkoppelt ist.

Wir versuchen nunmehr, die vorhergehenden Betrachtungen auf Systeme mit $n > 3$ zu übertragen, wobei uns der Fall $n = 4$ schon alles Wesentliche erkennen läßt.

Wir betrachten das Problem wieder von der geometrischen Seite her. Um die Vorstellung zu erleichtern, nehmen wir an, daß die 3 (reduzierten) Massenpunkte mit gleichen Radien umlaufen und daß die verschiedenen Trägheitsmomente allein durch verschiedene Massen hervorgebracht werden. Unser Ziel wäre es, eine Vorschrift zu finden, mit der wir einer Konfiguration der drei Massenpunkte ein Koordinatensystem zuordnen können, welches sich auf Grund dieser Zuordnung bei beliebiger Bewegung der Massen mit der durch Gl. (21) bestimmten Winkelgeschwindigkeit Ω dreht. Wenn wir ein solches System für eine gegebene — allgemeine — Konfiguration mit speziellem Bewegungszustand eindeutig finden können, so muß dieses für alle Bewegungszustände das gesuchte Bezugssystem sein. Wir betrachten deshalb den einfachsten Fall $L = 0$. Aus Gl. (21) folgt dann sofort $\Omega = 0$, d. h. der von uns gesuchte, allein durch die Konfiguration zu bestimmende Raum befindet sich in Ruhe. Die Relativdrehimpulse l_i fallen hier mit den L_i zusammen, und ihre Summe ist daher ebenfalls Null, wie es die zu (21) äquivalente Gl. (25) verlangt. Mit der Feststellung, daß der gesuchte Raum ruht, sind wir allerdings keineswegs am Ziel. Wir müssen vielmehr versuchen, diesen Raum eindeutig und ausschließlich an die Konfiguration des Systems anzuhängen.

Um diese Zuordnung zu finden, spezialisieren wir noch weiter, indem wir denjenigen Zustand mit $L = 0$ betrachten, der sich ergibt, wenn die 3 Massenpunkte von einem bestimmten Punkt der Kugeloberfläche aus nach Art einer „Explosion“ auseinanderfliegen. Aus jeder daraus entspringenden Konfiguration kann man bei bekannter Masse der 3 Punkte den „Explosionspunkt“ durch Zurückrechnen eindeutig bestimmen, wenn man noch die Forderung hinzufügt, daß der gesuchte Punkt in dem kleineren der durch die 3 Massenpunkte bestimmten Kugeldreiecke liegt. In der Ebene würde eine analoge Rechnung natürlich den Schwerpunkt der 3 Massenpunkte liefern.

Solange diese Rechnung den wirklichen Explosionspunkt ergibt, haben wir für diesen Bewegungs-

typus tatsächlich eine raumfeste Achse, die wir wieder als Zentralachse bezeichnen, gefunden. Nach dem Gesagten müßte nun diese Achse auch für jeden anderen Bewegungstypus im Falle $L = 0$ raumfest bleiben.

Tatsächlich lassen sich jedoch leicht Beispiele finden, wo dies nicht der Fall ist. Eines der einfachsten ist vielleicht das folgende: Auf dem Pol einer Kugel sitzt eine Masse $M = 2m$, auf dem Äquator laufen zwei gleiche Massen m in entgegengesetzter Richtung auseinander. Die Zentralachse war am Anfang die Winkelhalbierende zwischen dem Radius der Masse M und dem zu Anfang gemeinsamen Radius der beiden Massen m . Wenn die beiden Massen m auseinander laufen, so wandert die Zentralachse in Polrichtung und erreicht diesen schließlich, wenn beide Massen je einen Viertelskreis durchlaufen haben. Die Zentralachse erfüllt also bei diesem Bewegungstypus nicht die Bedingung, daß sie räumlich fest bleibt. Daraus folgt, daß die Zentralachse und das daran hängende Bezugssystem für eine Separation des Systems nicht verwendet werden können.

IX. Zusammenfassung

Mit den vorhergehenden Überlegungen wurde gezeigt, daß die Behandlung des Drei-Körper-Problems für die begriffliche Fassung der „Rotation“ eines Systems von Massenpunkten wesentliche Einsichten zu vermitteln vermag. Es ergab sich zunächst, daß für das Drei-Körper-Problem im Falle fester Zentralabstände des zugehörigen reduzierten Problems eine vollständige Entkopplung zwischen „innerer“ und „kollektiver“ Bewegung möglich ist, in dem Sinne, daß bei Einführung eines geeigneten Bezugssystems keine gemischten Produkte zwischen den zu inneren bzw. äußeren Koordinaten gehörigen kanonischen Impulsen mehr auftreten. Bei Systemen mit mehr als 3 Teilchen besteht die Möglichkeit einer derartigen Entkopplung nicht mehr. Bei nicht-konstanten Zentralabständen des reduzierten Problems entfällt sie bereits im Drei-Körper-Problem.

Diesen Einschränkungen, die für die klassische und die Quantenmechanik in ganz analoger Weise gelten, steht auf dem Gebiet der Atomkerne die Tatsache gegenüber, daß in der Natur Systeme von Massenpunkten existieren, bei denen mit erstaunlicher Genauigkeit Energiestufen gefunden werden, die als Rotationsbanden zu deuten sind. Zur Deutung dieser Erscheinungen und der darin sich äußernden

Trägheitsmomente wurden schon zahlreiche theoretische Ansätze gemacht, die aber durchweg nicht voll befriedigen, da sie vielfach die Kopplungsglieder, deren zentrale Bedeutung hier aufgewiesen wurde, als vernachlässigbar betrachten und unterdrücken.

Im Sinne unserer Modellvorstellungen haben wir es hierbei mit Systemen von Massenpunkten mit meist recht großen Teilchenzahlen zu tun, bei deren Reduktion man überdies keineswegs mit dem Auftreten fester Zentralabstände rechnen kann. Es werden also Kopplungsglieder unvermeidlich auftreten. Es erhebt sich daher die Frage, wie man vorgehen hat, um die Wirkung dieser Kopplungsglieder möglichst weitgehend zu beseitigen, um dann

an einem möglichst gut „entkoppelten“ System die auftretenden Energiestufen studieren zu können.

Unsere Überlegungen haben jedoch gezeigt, daß mit der hier angestrebten Entkopplung das Auftreten von Rotationsbanden im Energiespektrum des betreffenden Systems noch keineswegs verständlich wird. Hierzu sind vielmehr noch speziellere — und noch näher zu untersuchende — Voraussetzungen erforderlich, die in unseren Überlegungen nur andeutungsweise sichtbar wurden. Ihre genauere Untersuchung an geeigneten Modellen soll einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben, die sich auch mit der Frage der „effektiven“ Trägheitsmomente derartiger Gebilde beschäftigen soll.

Über Linear Passive Transformationen Stochastischer Prozesse I *

J. KELLER

Institut für Theoretische Physik der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforsch. **23a**, 1430—1438 [1968]; eingegangen am 13. Juli 1968)

The theory of linear passive systems, developed by KÖNIG and MEIXNER, is extended to the case where the input is not a well determined function of time but rather a stochastic process. In this case the answer of the system generally will also be a stochastic process. The input and output processes are connected by a linear passive transformation (LPT). Some examples are given of physical systems which may be described by LPT of stochastic processes. General properties of the mean value and the dispersion of the output process are derived.

Einleitung

Viele Vorgänge in physikalischen Systemen lassen sich in mathematischer Hinsicht als deterministische oder stochastische Transformation $L(t)$ (das Argument t beim Operator L soll nur andeuten, daß dieser Operator auf Funktionen der Variablen t wirkt) eines deterministischen oder stochastischen Prozesses $x(t)$ behandeln. Das heißt man kann den Vorgang schematisch durch eine Beziehung der Struktur

$$y(t) = L(t)x(t) \quad (\text{E.1})$$

beschreiben. Dabei bezeichnet man die Größe $x(t)$ als „äußere Erregung“ oder Input-Funktion und $y(t)$ als „Antwort des Systems“ oder Output-Funktion. Der Operator $L(t)$ ist eine charakteristische Größe des vorliegenden physikalischen Systems. Je nachdem welche der in (E.1) auftretenden Größen

bekannt bzw. unbekannt sind, liegt eines der folgenden Probleme vor:

- a) gegeben: $x(t)$, $L(t)$; gesucht: $y(t)$,
- b) gegeben: $x(t)$, $y(t)$; gesucht: $L(t)$,
- c) gegeben: $x(t)$ und einige allgemeine Eigenschaften von $L(t)$;
gesucht: Die explizite Gestalt von $L(t)$ und $y(t)$.

Bei Aufgabe a) liegt ein Vorhersageproblem vor: Wie wird ein bekanntes physikalisches System auf eine vorgegebene äußere Erregung reagieren? Beispiel: KUBO-Formalismus¹.

Problemstellungen vom Typ b) liegen sehr oft in der Experimentalphysik vor: Man mißt die äußere Erregung und die Antwort des Systems und sucht daraus Aufschluß über das physikalische System selbst zu bekommen. Beispiel: Aufklärung der

* Herrn Professor Dr. h.c. Dr. phil. J. MEIXNER zum 60. Geburtstag gewidmet.

¹ Siehe z.B.: R. KUBO, J. Phys. Soc. Japan **12**, 570, 1203 [1957]. — S. NAKAJIMA in „Rendiconti della Scuola

Internationale die Fisica Enrico Fermi“, Corso X edited by S. R. DE GROOT, Bologna 1959, p. 275. — I. L. LEBOWITZ u. A. SHIMONY, Phys. Rev. **128**, 1945 [1962]. F. V. BUNKIN, Soviet Phys. JETP **17**, 1954 [1963].